D-MATH | Lineare Algebra I | HS 2020
Dr. Menny Akka Ginosar | ETH Zürich
Paula Truöl

Serie 3

Ebenen, lineare Gleichungssysteme, Eliminationsverfahren von Gauss

Hinweise: Diese Serie beschäftigt sich unter anderem mit dem Eliminationsverfahren von Gauss. Das ist ein sehr wichtiges Verfahren, welches uns im Verlauf der Vorlesung begleiten wird. Üben Sie es deswegen ein, bis Sie es verstanden haben. Weitere Aufgaben können Sie auch im „Übungsbuch zur Linearen Algebra, Aufgaben und Lösungen“ von Hannes Stoppel und Birgit Griese finden, siehe hier: `https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-658-14522-4`.
Jeweils 2 Punkte können Sie für die Aufgaben 2, 6 und 8 bekommen. Wir erwarten, dass Sie nicht nur diese Aufgaben lösen, sondern die ganze Serie bearbeiten.

1. Betrachte die drei Ebenen E_1, E_2 und E_3 im $\mathbb{R}^3$, die durch folgende Gleichungen definiert sind

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 2x - 4y + 6z &= 5 \\ 3x - 5y + 7z &= 6 \end{aligned}$$

   (a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der drei Ebenen. Zeichnen Sie die drei Ebenen und deren Schnittpunkt (qualitativ) in ein Koordinatensystem.

   (b) Bestimmen Sie eine Parametrisierung der Schnittgeraden von E_1 und E_3 und zeichnen Sie die Gerade in das Koordinatensystem ein.

   (c) Für welche $a \in \mathbb{R}$ schneidet die Gerade

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \; t \in \mathbb{R} \right\}$$

   die Ebene E_2?

2. Sei $E \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ die Ebene durch die Punkte $(0, 0, 0), (1, 2, 1)$ und $(-1, 1, 4)$ und sei F die Ebene gegeben durch die Gleichung $x = y$. Bestimme die Schnittmenge $E \cap F$. (2)

3. Sei E die Ebene

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

   in parametrisierter Form. Finden Sie eine lineare Gleichung $ax + by + cz = d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, sodass E die Lösungsmenge dieser Gleichung ist. Stellen Sie dazu ein lineares Gleichungssystem auf, welches Sie mit Zeilenoperationen vereinfachen.

4. Geben Sie je ein Beispiel eines linearen Gleichungssystems mit

   (a) 3 Gleichungen, 4 Unbekannten, keiner Lösung,

   (b) 4 Gleichungen, 2 Unbekannten, genau einer Lösung.

5. Bestimmen Sie jeweils eine Parametrisierung der Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems, welches durch die erweiterte Koeffizientenmatrix (A, b) gegeben ist.

(a)

$$(A,b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 7 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

(b)

$$(A,b) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a-4 \end{array}\right)$$

für einen Parameter $a \in \mathbb{R}$.

(c)

$$(A,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

6. Sei $A = (a_{ij})$ eine $(m \times n)$-Matrix mit reellen Einträgen $a_{ij} \in \mathbb{R}$ für $m, n \in \mathbb{N}$. Sei $b \in \mathbb{R}^m$ und sei $y \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$. Zeigen Sie, dass (2)

$$\text{Lös}(A,b) = y + \text{Lös}(A,0) = \{v \mid v = y + z \text{ für ein } z \in \text{Lös}(A,0)\}$$

gilt. Man nennt $\text{Lös}(A,0)$ die Lösungsmenge des *homogenen Gleichungssystems* $A \cdot x = 0$ und y eine *spezielle Lösung* des Gleichungssystems $A \cdot x = b$.

7. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 \\ 2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Matrix bzw. ein Vektor über $\mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $A \cdot x = 0$ für $x \in \mathbb{R}^3$.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $A \cdot x = b$ für $x \in \mathbb{R}^3$. Dies können Sie entweder mit dem Eliminationsverfahren von Gauss machen oder die Aussage aus Aufgabe 6 verwenden, indem Sie eine spezielle Lösung des Gleichungssystems finden. Für das Finden solch einer speziellen Lösung haben Sie z.B. in der Übungsstunde eine Methode kennengelernt.

8. Bestimme alle reellen Zahlentripel (a, b, c), für welche das Gleichungssystem (2)

$$\begin{aligned} ay + bz &= 0 \\ ax + cz &= 0 \\ bx + cy &= 0\,. \end{aligned}$$

nur die triviale Lösung hat.

9. Bestimmen Sie mit Hilfe des Algorithmus von Gauss alle Matrizen $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit der Eigenschaft, dass die Summe über alle Elemente jeder Zeile, jeder Spalte und beider Diagonalen einen vorgegebenen Wert $c \in \mathbb{R}$ annimmt. Wie lautet insbesondere die Zahl a_{22}? Ergänzen Sie nun die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 16 & a_{13} \\ 24 & 30 & 36 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

so, dass sie den obigen Bedingungen genügt.